JAK WYGRYWAĆ W GRACH

Bolesław Kulbabiński
Uniwersytet Warszawski
bkulbabinski@gmail.com

1. Zagadnienia programowe

Te zajęcia są wprowadzeniem do teorii gier, która nie występuje w podstawie programowej. Rozważania są jednak na elementarnym poziomie matematycznym i informatycznym i ze względu na swój zakres mogą zainteresować uczniów, których pociąga logiczne i algorytmiczne myślenie. Podczas zajęć uczniowie posługują się komputerem jako „partnerem" do gry.

2. Temat zajęć

Jak wygrywać w grach

Celem tych zajęć jest:

- przedstawienie ścisłego, matematycznego podejścia do prostych, dwuosobowych gier kombinatorycznych;
- uświadomienie uczniom, że pewna klasa gier ma zawsze z góry ustalonego zwycięzcę i przegranego;
- przedstawienie metod znajdowania optymalnych ruchów w grach.

3. Cele lekcji (zajęć)

W wyniku tych zajęć uczeń powinien umieć:

- zdefiniować pozycje przegrywające i wygrywające oraz podać warunki na ich istnienie;
- rozwiązać grę NIM, to znaczy stwierdzić, czy pozycja jest przegrywająca czy wygrywająca i podać optymalny ruch;
- znać definicję funkcji Sprague-Grundy'ego i potrafić wyliczyć jej wartości dla gry będącej sumą gier.

4. Przygotowanie uczniów

Uczniowie przystępujący do tych zajęć powinni:

- znać i rozumieć zapis binarny liczb całkowitych;
- znać i rozumieć funkcję XOR oraz jej własności, takie jak: łączność, przemienność oraz możliwość skracania;
- znać technikę programowania dynamicznego;
- mieć podstawową wiedzę z teorii grafów, w szczególności wiedzieć, co to jest acykliczny graf skierowany (DAG);

5. Metody pracy

W zajęciach są stosowane następujące metody pracy:

- rozgrywanie kilku partii analizowanej gry w parach – ma to doprowadzić do pełnego zrozumienia zasad gry i próby opracowania własnej strategii;
- posłużenie się przez nauczyciela i uczniów objaśnieniami i demonstracjami przykładowych strategii w rozważanych grach za pomocą schematów;
- przygotowanie przez uczniów schematów działania wybranych algorytmów;
- zapisanie algorytmów w wybranym języku programowania i uruchomienie odpowiednich programów na komputerze;
- samodzielne testowanie poprawności programów dla odpowiednio dobranych danych;
- prezentacja otrzymanych rozwiązań.

6. Formy pracy

Założone cele są realizowane za pomocą następujących form pracy:

- podczas burzy mózgów prowadzonej przez całą klasę lub w grupach uczniów – ma to doprowadzić do sformułowania algorytmu dla przedstawionego problemu;
- przygotowywanie opisów algorytmów może odbywać się indywidualnie lub w parach uczniów;
- programy dla komputerów uczniowie piszą samodzielnie;
- testowanie programów może odbywać się w grupach uczniów – uczniowie wspólnie poprawiają błędy w programach, dobierają dane i porównują wyniki działania swoich programów;
- końcowym efektem pracy nad danym problemem jest prezentacja opisu algorytmu, programu komputerowego oraz wyników działania programu.

7. Materiały pomocnicze

Nauczyciel i uczniowie korzystają z tablicy lub z tablicy z kartkami papieru, gdzie zapisują specyfikacje problemów, opisy algorytmów, schematy działania algorytmów, fragmenty programów. Przydatne mogą być także nośniki informacji do przenoszenia danych między komputerami.

Uczniowie nieraz są proszeni o rozgrywanie między sobą partii gier, polegających głównie na układaniu żetonów, przemieszczaniu pionków lub rysowaniu. Użyteczne będą zatem kartki papieru, przybory do pisania oraz zbiór jednakowych żetonów, klocków czy też monet (na przykład jednogroszowych).

8. Środki dydaktyczne

Uczniowie wykorzystują w czasie tych zajęć:

- materiały dotyczące algorytmiki, opracowane w projekcie Informatyka +;
- komputer i jego podstawowe oprogramowanie, w tym kompilatory algorytmicznych języków programowania.

9. Przebieg zajęć (kolejnych lekcji)

Zajęcia, których celem jest omówienie podstaw teorii gier, mogą być rozłożone na kilka lekcji, niekoniecznie kolejnych. W niniejszej propozycji przyjęliśmy następujący tryb realizacji omawianego tematu:

- na początku, nauczyciel wyjaśnia uczniom, jakie dokładnie gry będą analizowali, oraz przedstawia kilka prostych gier, prosząc uczniów o znalezienie jak najlepszych strategii (Lekcja 1);
- następnie są definiowane pozycje wygrywające i przegrywające oraz zostaje omówiona klasyczna gra NIM (Lekcja 2);
- jako kolejny etap formalizacji zostaje wprowadzona funkcja Sprague-Grundy'ego oraz jej podstawowa własność umożliwiające sumowanie gier (Lekcja 3);
- na koniec, nauczyciel przedstawia uczniom kilka gier, które pozornie są zupełnie inne od wcześniej omawianych, jednakże można sprowadzić je do znanych schematów (Lekcja 4).

Lekcja 1. Przedstawienie kilku prostych gier. Czas: 45 minut.

Zanim zajmiemy się ścisłą analizą gier, musimy zdefiniować jakimi dokładnie grami będziemy się zajmować. Chcemy, aby analizowane gry spełniały pięć poniższych warunków.

- Po pierwsze, skupimy się tylko na grach dwuosobowych, w których gracze wykonują ruchy na przemian.
- Nie będziemy rozważać gier nieskończonych. Oznacza to, że w analizowanych przez nas grach zawsze będzie można wyłonić zwycięzcę po pewnej, skończonej liczbie ruchów, niezależnie od sposobu gry obu graczy.
- Trzecią, ważną własnością jest tzw. pełna informacja, co oznacza, że obydwaj gracze zawsze widzą cały stan gry (planszy, pionków, kart itp.). Przykładowo, nie rozważamy gier karcianych, takich jak brydż, gdzie gracze mają w rękach własne karty, których inni gracze nie znają.
- Kolejną zasadą niech będzie to, że zbiór dopuszczalnych ruchów nie zależy od gracza, który aktualnie wykonuje ruch. Przykładowo, nie będziemy rozważać gry w szachy, gdzie jeden gracz może ruszać się tylko białymi pionkami a drugi tylko czarnymi. W naszych grach dopuszczalne ruchy nie zależą od tego, który gracz je wykonuje.
- Wreszcie ostatnie założenie – nie dopuszczamy remisów, tzn. każda gra zawsze kończy się wygraną jednego z graczy.

Warto zapisać w widocznym miejscu te pięć zasad (gry **dwuosobowe, skończone, z pełną informacją, wspólnym zbiorem ruchów i bez remisów**), aby w przyszłości można było skontrolować, że rozważane gry rzeczywiście są tego typu.

Zacznijmy od prezentacji prostej gry w zabieranie. Na stole leży 13 monet. Gracze na przemian zabierają monety ze stołu, przy czym w jednym ruchu można zabrać 1, 2 lub 3 monety (nie można nie wziąć żadnej). Gracz, który zabierze ostatnią monetę wygrywa. Pozwólmy uczniom pograć między sobą w tę prostą grę, jednocześnie prosząc, aby spróbowali opracować zwycięską strategię. Który z graczy ma w tej grze przewagę – rozpoczynający czy może ten drugi? Następnie, niech uczniowie spróbują zagrać w tę samą grę, jednak zaczynając z 12 monetami. Jak zmieni się sytuacja obu graczy?

Prawdopodobnie niektórzy uczniowie odgadną prawidłową strategię w powyższej grze, którą jest tzw. „uzupełnianie do czterech". **Pozycją** w tej grze nazywać będziemy liczbę monet aktualnie znajdujących się na stole. Gracz, który wykonuje swój ruch z pozycji będącej liczbą podzielną przez 4, zawsze przejdzie do pozycji niepodzielnej przez 4. Z kolei gracz, który zastanie pozycję niepodzielną przez 4, będzie w stanie odpowiednim ruchem dojść do pozycji podzielnej przez 4. Pozostaje jeszcze zauważyć, że gracz przegrywa jeśli musi wykonać ruch, gdy na stole znajduje się zero monet, a zero jest liczbą podzielną przez 4. A zatem gracz, który zaczyna z pozycji niepodzielnej przez 4, zawsze jest w stanie wygrać! Wystarczy, że przejdzie do pozycji podzielnej przez 4, czym zmusi swojego przeciwnika do przejścia do pozycji niepodzielnej przez 4, z której to będzie mógł kontynuować swoją strategię. W końcu gracz pierwszy doprowadzi do pozycji z liczbą monet równą zero i tym samym wygra grę.

Jeśli więc rozpoczynamy grę z 13 monetami, pierwszy gracz powinien zacząć od zabrania jednej monety ze stołu a następnie uzupełniać ruchy przeciwnika do pełnych czwórek. Jeśli przeciwnik zabierze trzy monety, my zabieramy jedną; jeśli dwie – my też dwie; jeśli natomiast zabierze jedną, my zabieramy trzy. W każdej z tych sytuacji doprowadzamy do pozycji podzielnej przez 4, więc uda nam się w końcu doprowadzić do zera. W przypadku rozpoczęcia gry od 12 monet gracz pierwszy jest niestety skazany na niepowodzenie. Każdy nasz ruch doprowadzi do pozycji niepodzielnej przez 4, z której to nasz przeciwnik może wystartować ze znaną już nam zwycięską strategią.

i+

Dobrym ćwiczeniem programistycznym jest napisanie programu grającego w grę w zabieranie z użytkownikiem. Program powinien być interaktywny oraz wypisywać czytelne informacje i polecenia, na przykład „Podaj liczbę monet:", „Zabrałem 3 monety. Zostało 8 monet. Podaj swój ruch:". Oczywiście najważniejsze jest, aby program grał optymalnie, stosując odkrytą przez nas strategię. Uczniowie mogą testować nawzajem swoje programy próbując wygrać, gdy zaczynają z potencjalnie przegranej pozycji.

Rozważmy jeszcze jedną prostą grę. Tym razem na stole znajdują się dwa stosiki monet (nie koniecznie tej samej wysokości). Gracz wykonujący ruch wybiera **jeden** ze stosików, po czym zdejmuje z niego dowolną liczbę monet. Może zabrać nawet wszystkie, ale musi wziąć przynajmniej jedną. Wygrywa gracz, który zabierze ze stołu ostatnią monetę. Ponownie pozwólmy uczniom rozegrać między sobą kilka partii tej gry. Pozycją w tej grze nazywać będziemy aktualne wysokości stosów, czyli **parę liczb** całkowitych nieujemnych. Tym razem dobrą strategią na wygraną będzie „kopiowanie ruchów przeciwnika". Załóżmy, że gra zaczyna się od dwóch **równych** stosów i gracz nr 1 wykonał pewien ruch. Gracz nr 2 może w tym momencie wykonać taki sam ruch na drugim stosie, doprowadzając z powrotem do układu, w którym stosy są równej wielkości. Kontynuując tę strategię, gracz drugi zapewni sobie wygraną! W pewnym momencie gracz pierwszy będzie zmuszony opróżnić jeden ze stosów, po czym gracz drugi szybko opróżni drugi stos i wygra grę. Widzimy, że pozycja składająca się z dwóch równych stosików stawia na straconej pozycji gracza rozpoczynającego. Jak jest w przypadku stosików różnej wysokości? Gracz rozpoczynający może zdjąć odpowiednią liczbę monet z wyższego stosu tak, aby stosiki się wyrównały. Tym samym zmusi on drugiego gracza do rozpoczęcia z „pechowej" pozycji i w konsekwencji do przegranej. Zwróćmy jeszcze uwagę na podobieństwo do gry w zabieranie. Tam strategią na wygraną było nieustanne doprowadzanie przeciwnika do pozycji podzielnej przez 4. Natomiast w grze ze stosami, klucz do sukcesu leży w doprowadzaniu do układu, w którym oba stosy są równe.

Na koniec możemy zastanowić się nad nieco mniej formalną grą, będącą raczej zagadką logiczną. Zasady gry są następujące: w grze uczestniczy dwóch graczy, którzy na prostokątnym stole układają na przemian jednakowe monety (np. jednogroszowe). Warunek jest jeden – monety nie mogą na siebie zachodzić. Przegrywa gracz, dla którego zabraknie miejsca na stole na położenie monety. Czy któryś z graczy może łatwo zapewnić sobie wygraną? Pozwólmy uczniom zastanowić się chwilę nad tym problemem. Z pewnością uważni uczniowie dostrzegą tutaj możliwość zastosowania strategii kopiowania ruchów przeciwnika. Wystarczy bowiem, że pierwszy gracz położy pierwszą monetę dokładnie na środku stołu, a następnie będzie kopiował ruchy przeciwnika symetrycznie względem środka stołu. Jeśli przeciwnik znajdzie miejsce na położenie monety, to gracz pierwszy także, tym samym zapewniając sobie zwycięstwo.

Lekcja 2. Pozycje wygrywające i przegrywające na przykładzie gry NIM. Czas: 45 minut.

Drugą lekcję rozpoczniemy od podania ścisłych definicji pozycji przegrywających i wygrywających, którymi będziemy się później wielokrotnie posługiwać.

Pozycją przegrywającą (pozycją P) nazywamy pozycję w grze, z której **każdy ruch** prowadzi do pewnej pozycji wygrywającej **lub** z pozycji tej nie można wykonać żadnego ruchu (jest ona pozycją końcową). **Pozycją wygrywającą** (pozycją W) nazywamy pozycję w grze, z której **istnieje ruch** do pewnej pozycji przegrywającej.

Warto zwrócić uwagę uczniów na zwroty „istnieje ruch" i „każdy ruch". Definicje te są oczywiście zgodne z intuicją. Jeśli mianowicie z pewnej pozycji istnieje ruch prowadzący do pozycji przegrywającej, to możemy go wykonać aby postawić w niej przeciwnika, co sprawia, że nasza pozycja jest wygrywająca. Analogicznie, jeśli z pewnej pozycji każdy ruch prowadzi do pozycji wygrywającej, to niezależnie od naszego posunięcia postawimy przeciwnika w pozycji wygrywającej, więc sami przegramy.

Spróbujmy oznaczyć pozycje w znanej nam grze w zabieranie. Drobną subtelnością może być fakt, że pozycja 0 (brak monet na stole) jest pozycją przegrywającą. Znalezienie się w takiej pozycji oznacza bowiem, że przeciwnik przed chwilą zabrał ostatnią monetę, czyli wygrał. Tabela pozycji wygląda następująco:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P	W	W	W	P	W	W	W	P	W	W	W	P	W

Przykładowo, pozycja 2 jest wygrywająca ponieważ **istnieje** ruch prowadzący do pozycji przegrywającej (pozycji 0), natomiast pozycja 8 jest przegrywająca ponieważ **każdy** ruch prowadzi do pozycji wygrywającej (5,6 lub 7).

Przejdźmy teraz do opisu klasycznej gry NIM oraz nieco zaskakującego jej rozwiązania. Na poprzedniej lekcji omawialiśmy grę z dwoma słupkami monet. Był to szczególny przypadek gry NIM. W ogólności słupków może być dowolnie wiele (niech będzie ich k). A zatem pozycja w grze NIM to **ciąg *k* liczb** całkowitych nieujemnych. Gracz wykonujący ruch wybiera najpierw jeden z k słupków, który nie jest pusty, a następnie zdejmuje z niego dowolną liczbę monet (co najmniej jedną). Wygrywa gracz, który zabierze ostatnią monetę.

Przedstawimy teraz rozwiązanie gry NIM oraz uzasadnimy jego poprawność. Oznaczmy wysokości słupków przez $a_1, a_2, ..., a_k$. Twierdzimy, że pozycja jest przegrywająca wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_k = 0 \text{ (XOR wartości } a_1, a_2, ..., a_k \text{ jest równy 0).}$$

Na pierwszy rzut oka może to wydawać się zupełnie nieintuicyjne. Argumentacja będzie jednak podobna do poprzednich strategii – pokażemy, że gdy wartość XOR wysokości słupków jest różna od zera, to istnieje ruch prowadzący do pozycji o wartości XOR równej 0, a także, że z pozycji o wartości XOR równej zero, każdy ruch zmienia tę wartość na niezerową.

Przeanalizujmy najpierw pozycję $(a_1, a_2, ..., a_k)$ taką, że $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_k = 0$. Jeśli wszystkie wysokości słupków są zerami, to jest to oczywiście pozycja przegrywająca. W przeciwnym wypadku rozważmy dowolny ruch polegający na zabraniu pewnej liczby monet z słupka o numerze i. Oznaczmy liczbę monet, jaka została na tym słupku przez b_i. Oczywiście $b_i < a_i$. Załóżmy, że otrzymana pozycja jest również pozycją o wartości XOR równej 0. Zachodzi więc

$$a_1 \oplus ... \oplus a_i \oplus ... \oplus a_k = a_1 \oplus ... \oplus b_i \oplus ... \oplus a_k.$$

Jak wiemy operacja XOR ma własność skracania, dzięki której możemy pominąć te same wyrazy po obu stronach równania otrzymując $a_i = b_i$, co daje sprzeczność. A zatem rozważany ruch musiał prowadzić do pozycji o wartości XOR różnej od zera. Był on wybrany dowolnie, dzięki czemu możemy śmiało stwierdzić, że każdy ruch prowadzi do takiej pozycji.

Pozostaje rozważyć pozycję $(a_1, a_2, ..., a_k)$ taką, że $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_k > 0$. Oznaczmy tę wartość XOR przez m. Rozważmy teraz zapis binarny liczby m. Oznaczmy przez p pozycję najbardziej znaczącej jedynki w zapisie binarnym liczby m. Z definicji funkcji XOR wynika, że skoro liczba m ma na pozycji p jedynkę, to nieparzyście wiele spośród liczb $a_1, a_2, ... , a_k$ ma jedynki na tej właśnie pozycji p. Oznacza to, że istnieje co najmniej jedna taka liczba a_i. Niech $b_i := a_i \oplus m$. Twierdzimy, że szukanym przez nas ruchem jest zredukowanie liczby monet na i-tym stosiku z a_i do b_i. Istotnie, korzystając z prawa skracania oraz przemienności otrzymujemy kolejno równości:

$$a_1 \oplus ... \oplus a_{i-1} \oplus a_i \oplus a_{i+1} \oplus ... \oplus a_k = m,$$
$$a_1 \oplus ... \oplus a_{i-1} \oplus (a_i \oplus m) \oplus a_{i+1} \oplus ... \oplus a_k = m \oplus m,$$
$$a_1 \oplus ... \oplus a_{i-1} \oplus b_i \oplus a_{i+1} \oplus ... \oplus a_k = 0.$$

Oznacza to, że pozycja, do której przejdziemy jest przegrywająca, przez co nasza jest wygrywająca. Pominęliśmy jednak w dotychczasowym rozumowaniu pewien szczegół. Musimy jeszcze wykazać, że liczba b_i jest mniejsza niż a_i (nie możemy bowiem dokładać monet do stosików!). Wynika to łatwo z tego, że liczba $a_i \oplus m$ ma w zapisie binarnym zero na p-tej pozycji, natomiast cyfry na pozycjach większych niż p ma takie same jak liczba a_i.

Udało nam się zatem podzielić zbiór pozycji w grze NIM na dwa zbiory, których elementy spełniają definicję pozycji wygrywających i przegrywających. Wzorem poprzednich ćwiczeń, uczniowie mogą spróbować napisać program grający optymalnie w grę NIM. Znalezienie optymalnego ruchu nie jest już takie trywialne jak poprzednio i może wymagać trochę sprawności programistycznej (np. znajomości operacji bitowych).

Lekcja 3. Funkcja Sprague-Grundy'ego na przykładzie gry grafowej. Czas: 45 minut.

Przy rozważaniu bardziej złożonych gier pomocne może być twierdzenie Sprague-Grundy'ego, które wprowadzimy na tej lekcji. Zaczniemy jednak od dwóch definicji.

Przez

$$\mathrm{mex}\{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

oznaczać będziemy **najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią**, która **nie występuje** w zbiorze $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Na przykład mex{3,0,1,5} = 2, natomiast mex{1,2,3,5} = 0 (nazwa mex pochodzi od angielskiego *minimal-excludant*).

Możemy teraz zdefiniować **funkcję Sprague-Grundy'ego** (w skrócie funkcję Grundy'ego) SG(p), określoną dla każdej pozycji p w grze w następujący sposób:

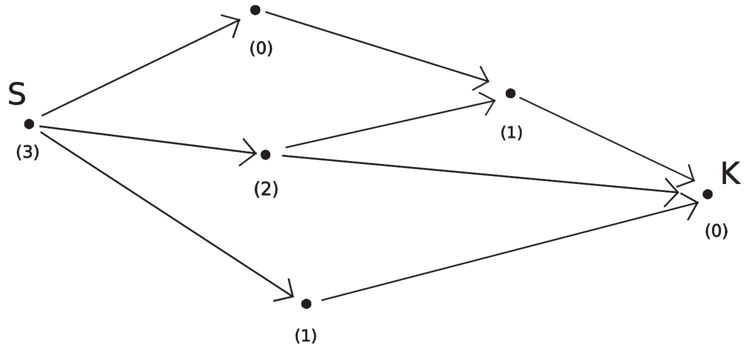
SG(p) = 0, gdy p jest pozycją końcową (przegrywającą),

SG(p) = mex{SG(q): z pozycji p można przejść do pozycji q}.

Innymi słowy, wartość SG dla pozycji p jest najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią, która nie jest wartością SG żadnej pozycji osiągalnej bezpośrednio z p.

Łatwo zauważyć, że pozycje przegrywające będą zawsze miały wartość SG równą zero, natomiast dla pozycji wygrywających te wartości będą dodatnie. Pytanie do uczniów – jak znaleźć optymalny ruch z pozycji wygrywającej? (Odpowiedź: trzeba przejść do pozycji, która ma wartość SG równą zero).

Rozważmy teraz prosty przykład gry grafowej. Niech dany będzie graf acykliczny, w którym jeden wierzchołek oznaczono jako startowy. Wyobraźmy sobie, że w wierzchołku startowym znajduje się pionek, który gracze na zmianę przesuwają wzdłuż krawędzi grafu. Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu, to znaczy dojdzie do wierzchołka, z którego nie wychodzi żadna krawędź. Taki wierzchołek zawsze istnieje, ponieważ graf jest acykliczny, a zatem gra jest skończona. Spróbujmy wyznaczyć wartości funkcji Grundy'ego dla gry na prostym grafie, na przykład takim, jak na poniższym rysunku. S oznacza pozycję startową pionka, K oznacza (jedyną) pozycję końcową. W nawiasach podano wartości funkcji SG.



Zdefiniujemy teraz ważne pojęcie sumy gier.

Sumą gier $G_1, ..., G_n$ nazywamy układ $(G_1, ..., G_n)$, traktowany jako jedna gra, w której ruchy wykonujemy w następujący sposób. Gracz najpierw wybiera grę G_i będącą jedną z gier $G_1, ..., G_n$, w której nie została jeszcze osiągnięta pozycja końcowa. Następnie wykonuje ruch w grze G_i zgodnie z jej zasadami. Przegrywa gracz, który nie może wykonać dozwolonego ruchu w żadnej z gier $G_1, ..., G_n$. Fizycznie, sumę gier możemy wyobrażać sobie jako ustawienie obok siebie plansz do kilku gier, a następnie wykonywanie na przemian ruchów w dowolnej z nich.

Do analizowania pozycji w grze będącej sumą gier przydatne bywa poniższe twierdzenie.

Twierdzenie Sprague-Grundy'ego

Niech G będzie sumą gier $G_1, ..., G_n$. Niech p będzie pozycją w grze G taką, że $p = (p_1, ..., p_n)$ – p jest złożona z pozycji p_1 w grze G_1, p_2 w grze G_2 itd.). Wtedy wartość funkcji Grundy'ego dla pozycji p dana jest wzorem

$$\mathrm{SG}(p) = \mathrm{SG}(p_1) \oplus \mathrm{SG}(p_2) \oplus ... \oplus \mathrm{SG}(p_n),$$

czyli jest wartością XOR dla wartości SG pozycji w grach składowych.

Twierdzenie to umożliwia łatwe obliczanie wartości funkcji Grundy'ego dla pozornie złożonych gier, będących sumami innych, prostszych gier, pod warunkiem, że umiemy obliczyć SG dla gier składowych. Twierdzenie Sprague-Grundy'ego jest w pewnym sensie uogólnieniem wcześniej udowodnionego twierdzenia o obliczaniu wartości XOR dla wysokości słupków w grze NIM. Jego dowód przebiega analogicznie – pozostawiamy go ambitniejszym uczniom do samodzielnego opracowania.

Jako ilustrację twierdzenia przeanalizujmy wspólnie z uczniami grę będącą sumą dwóch gier grafowych, czyli dla dwóch różnych grafów.

Warto też przedstawić uczniom inne spojrzenie na wcześniej analizowaną grę NIM. Można bowiem traktować ją jako sumę gier złożonych z pojedynczych słupków. Gra NIM z jednym słupkiem jest trywialna, aczkolwiek wyliczenie dla niej wartości funkcji SG pokazuje, że twierdzenie Sprague-Grundy'ego pokrywa się z wcześniej zaprezentowanym rozwiązaniem gry NIM. Okazuje się bowiem, że wartości funkcji SG w tym przypadku to po prostu wysokości słupków.

Lekcja 4. Rozwiązywanie klasycznych gier. Czas: 60-90 minut.

Ostatnia lekcja poświęcona jest rozwiązywaniu zadań polegających na znajdowaniu pozycji wygrywających i przegrywających w różnych grach. Czas jej trwania jest uzależniony głównie od tempa pracy uczniów nad opracowywaniem rozwiązań, jak również nad implementacją algorytmów. Poniższe gry podane są w kolejności od najłatwiejszej do najtrudniejszej.

Uogólniona gra w zabieranie

W omawianej przez nas wersji gry w zabieranie dopuszczaliśmy zabranie 1, 2 lub 3 monet. Nic nie stoi jednak na przeszkodzie, aby zbiór dopuszczalnych ruchów {1, 2, 3} zastąpić dowolnym innym, na przykład {2, 3, 7, 8}. W takiej grze gracze mogą w pojedynczym ruchu zabrać 2, 3, 7 lub 8 monet. Przegrywa ten, kto nie może wykonać legalnego ruchu. Pozycje wygrywające i przegrywające oraz odpowiednie ruchy wyznaczamy standardowo korzystając z ich definicji. Zadaniem dla uczniów może być na przykład zmodyfikowanie programu z lekcji nr 1 tak, aby przed rozpoczęciem gry pytał użytkownika o zbiór dopuszczalnych ruchów.

Gra Wythoffa

Gra Wythoffa jest rozgrywana na zwykłej szachownicy. Na pewnym polu ustawiony jest hetman. Gracze na przemian przesuwają hetmana, przy czym dozwolone są tylko ruchy w lewo, w dół lub ukośnie w lewy dół (o dowolną liczbę pól). Wygrywa gracz któremu uda się ustawić hetmana w lewym dolnym rogu szachownicy.

Aby rozwiązać to zadanie wystarczy potraktować pola szachownicy i dozwolone ruchy jako graf i wyznaczyć pozycje wygrywające i przegrywające wprost z definicji dla każdego pola.

Gra Kayles

Gra Kayles rozpoczyna się od pozycji, w której *n* butelek jest ustawionych w rzędzie tak, że odległość pomiędzy sąsiednimi butelkami wynosi dokładnie 10 cm. Gracze na przemian rzucają kulami do kręgli w stronę butelek. W jednym ruchu gracz może rozbić jedną dowolną butelkę, lub dwie butelki, ale tylko pod warunkiem, że stoją one obok siebie (odległość między nimi wynosi 10 cm). Zakładamy, że gracze zawsze trafiają, przez co w każdym ruchu co najmniej jedna butelka zostaje rozbita. Wygrywa gracz, który rozbije ostatnią butelkę. Który z graczy ma strategię wygrywającą i jakie powinien wykonywać ruchy?

Rozwiązanie gry Kayles nie jest trudne. Wystarczy zauważyć, że gdy rozbijemy butelki stojące z brzegu to otrzymamy tę samą grę Kayles z mniejszą liczbą butelek. Natomiast, gdy rozbijemy butelkę (lub butelki) ze środka rzędu to podzielimy naszą planszę na dwa rzędy, które możemy rozpatrywać niezależnie (przez to, że rzędy odseparowane są przerwą większą niż 10 cm, nie da się w jednym ruchu zbić butelek z różnych rzędów). Skoro gry te są niezależne, to możemy potraktować je jako jedną grę będącą sumą dwóch innych i zastosować twierdzenie Sprague-Grundy'ego. W rozwiązaniu wartości funkcji S możemy wyliczać stosując technikę programowania dynamicznego, poczynając od najmniejszych *n*.

Stworzenie własnej gry

Dodatkowo, ciekawym ćwiczeniem może być zaproponowanie uczniom, aby opracowali własne gry i przedstawili ich zasady. Następnie można wspólnie zastanowić się nad opracowaniem strategii wygrywających do gier, które wzbudzą największe zainteresowanie w grupie. Nauczyciel powinien przede wszystkim zwracać uwagę na to, czy proponowane przez uczniów gry spełniają warunki przedstawione na pierwszej lekcji, to znaczy, czy są dwuosobowe, skończone, bez remisów, z pełną informacją i wspólnym zbiorem ruchów.